

Теоретические вопросы

1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости. (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении, площадь треугольника)
2. Полярные системы координат (полюс, полярный ось, полярный угол, полярный радиус).
3. Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве. (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении)
4. Декартовы и аффинные системы координат (ось, угол, направление, ед. масштаб).
5. Понятие вектора. (определение, модуль вектора, направляющие косинусы, проекция вектора и ее свойства)
6. Линейная зависимость и независимость векторов (вектор, коллинеарность векторов, линейно зависимое и линейно независимое векторы).
7. Линейные операции над векторами. (правило треугольника, правило параллелограмма, умножении вектора на число и их свойств)
8. Проекция вектора на ось. (вектор, ось, угол, ось симметрии)
9. Скалярное произведение векторов. (свойств произведение, формулы)
10. Линейная зависимость четыре вектора. (вектор, линейная зависимость векторы, базис)
11. Векторное произведение векторов. (свойств произведение, формулы)
12. Координатное выражение скалярного произведение (вектор, длина, единичный вектор, координаты).
13. Смешанное произведение трех векторов. (свойств произведение, формулы)
14. Координатное выражение скалярного произведение (вектор, длина, единичный вектор, координаты).
15. Полярные координаты.
16. Смешанное произведение векторов (вектор, длина, координаты, свойство, геометрическая значение).
17. Сферические и цилиндрические координаты.
18. Линейная зависимость и независимость векторов (вектор, коллинеарность векторов, линейно зависимое и линейно независимое векторы).
19. Коллинеарные и компланарные векторы. (базисные векторы, линейная зависимость и независимость векторов)
20. Полярные системы координат (полюс, полярный ось, полярный угол, полярный радиус).
21. Сумма, разность и произведение числа на вектор. (свойств и их доказательства)
22. Декартовы и аффинные системы координат (ось, угол, направление, ед. масштаб).

23. Базис и координаты вектора. (базис вектора на плоскости и в пространстве, координаты вектора)
24. Проекция вектора на ось. (вектор, ось, угол, ось симметрии)
25. Замена декартовой системы координат Oxy на систему координат Ox_1y_1 . (замена без изменения начала координат).
26. Замена системы координат путем параллельного переноса начала координат. (замена системы координат).
27. Уравнение плоскости в отрезках. (ось отрезки в плоскости, общее уравнение плоскости).
28. Нормальное уравнение плоскости. (условия перпендикулярности прямой и плоскости).
29. Отклонение точки от плоскости. Расстояние от точки до плоскости. (нормаль, плоскость, радиус-вектор, отклонение точки).
30. Уравнение прямой в пространстве. (прямые как линия пересечения плоскостей).
31. Понятие о поверхности. (прямая линия, кривая линия, определение и формулы поверхности.)
32. Уравнение прямой проходящей через две точки в пространстве. (точки, коллинеарные векторы, уравнение прямой в пространстве).
33. Преобразование общей декартовой системы координат в пространстве. (поворот оси координат, параллельный перенос.)
34. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. (условия параллельности, перпендикулярности, совпадающих прямых линий).
35. Уравнение прямой в пространстве. (прямые как линия пересечения плоскостей).
36. Взаимное расположение двух плоскостей. (уравнение плоскости, нормаль векторы, условия перпендикулярности, параллельности, совпадающих плоскостей).
37. Угол между прямой и плоскостью, и их взаимное расположение. (прямая, направляющий вектор, нормальный вектор).
38. Уравнение прямой в пространстве. (прямые как линия пересечения плоскостей).
39. Преобразование системы координат. (единичные векторы, параллельный перенос, поворот оси координат).
40. Преобразуйте Oxy систему координат в систему координат $Ox'y'$ (изменить координату, не меняя начало координат).
41. Общее уравнение плоскости и ее частные случаи (положение плоскости относительно координатных осей).
42. Взаимное расположение двух плоскостей. (уравнение плоскости, нормаль векторы, условия перпендикулярности, параллельности, совпадающих плоскостей).

43. О матрице, перемещении и аффинные преобразования. [Подстановка, матрицы перехода, единичные векторы, обратная матрица].
44. Общее уравнение плоскости. Частные случаи (плоскость, вектор нормали, положение плоскости относительно осей координат).
45. Уравнение прямой в пространстве. (линия пересечения прямых плоскостей).
46. Общее уравнение поверхности. Понятие о поверхности. [Определение поверхности, формулы, оси, направляющий прямой]
47. Уравнение плоскости, проходящей через три точки (три точки, векторы, смешанное произведение, уравнение плоскости).
48. Преобразуйте Oxy систему координат в систему координат $Ox'y'$ [начало координат, ось, матрица перехода, базисные векторы]
49. Уравнение плоскости, заданной в отрезках (плоскость, отрезки в оси, уравнение плоскости).
50. Параллельный перенос начала координат [Ox_1 $O_1X_1Y_1$, Переход единичного вектора матрицы].
51. Общее уравнение плоскости и ее частные случаи (положение плоскости относительно координатных осей).
52. Линий второго порядка инварианты [Линий второго порядка общие уравнения, 1, 2, 3-инварианты].
53. Общее уравнение поверхности. Понятие о поверхности. [Определение поверхности, формулы]
54. Общее уравнение поверхности второго порядка. Формула нахождения центра.
55. Поверхности вращения второго порядка (система координат, плоскость, векторная кривая, вращающаяся поверхность).
56. Общее уравнение плоскости и ее частные случаи (положение плоскости относительно координатных осей).
57. Общее уравнение плоскости. Частные случаи (уравнение первого порядка)
58. Поверхности вращения второго порядка (система координат, плоскость, векторная кривая, вращающаяся поверхность).
59. Уравнение плоскости, заданное в отрезках (плоскость, отрезки в оси, уравнение плоскости).
60. Замена системы координат параллельным переносом начала координат (измените систему координат).
61. Преобразуйте Oxy систему координат в систему координат $Ox'y'$ (изменить координату, не меняя начало координат).

Практические вопросы

1. Векторы $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$.
Выразить через векторы $\vec{a}, \vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$, являющиеся сторонами этого параллелограмма.
2. В полярной система координат даны точки $M_1(\rho_1; \theta_1)$ и $M_2(\rho_2; \theta_2)$.
Вычислить расстояние d между ними.
3. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = \{4; -2; -3\}$ и $\vec{b} = \{0; 1; 3\}$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.
4. В треугольнике ABC проведена медиана AD . Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
5. Даны вершины $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -6)$, $C(-5; 0; 2)$ треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A .
6. Даны вершины треугольника $A(2; -5)$, $B(1; -2)$ и $C(4; 7)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B со стороной AC .
7. Точки E, F служат серединами сторон AB, CD четырехугольника $ABCD$.
Доказать, что
$$\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}.$$
8. Даны три вершины $A(3; -7)$, $B(5; -7)$, $C(-2; 5)$ параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого D противоположна B . Определить длины диагоналей этого параллелограмма.
9. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$ и $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$ и удовлетворяет условию $\vec{x}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.
10. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$, если известно, что векторы $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ и $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ взаимно перпендикулярны?
11. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = \{2; -3\}$, $\vec{q} = \{1; 2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a} = \{9; 4\}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}$.

12. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60° . Зная, что $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2$ и $|\vec{c}| = 6$, определить модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
13. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB . Выразить вектор $\overrightarrow{CH}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{CB}, \vec{b} = \overrightarrow{CA}$.
14. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Зная, что $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 4$, вычислить $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.
15. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.
16. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям $\vec{x}\vec{a} = -5, \vec{x}\vec{b} = -11, \vec{x}\vec{c} = 20$.
17. Даны вершины треугольника $A(3; -5), B(-3; 3)$ и $C(-1; -2)$. Определить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A .
18. Найти центр тяжести треугольника, вершины которого $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$.
19. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-4; -7), B(2; 6)$ и точка пересечения его диагоналей $M(3; 1)$. Найти две другие вершины параллелограмма.
20. Даны полярные координаты точек $A\left(8; -\frac{2\pi}{3}\right), B\left(6; \frac{\pi}{3}\right)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B .
21. Даны две точки $A(-3; 1), B(2; -3)$. На прямой AB найти такую точку M , чтобы она была расположена по ту же сторону от точки A , что и точка B , и чтобы отрезок $\overrightarrow{AM}$ был втрое больше отрезка $\overrightarrow{AB}$.
22. В полярной системе координат даны две противоположные вершины квадрата $P(6; -7\pi/12)$ и $Q(4; \pi/6)$. Определить его площадь.
23. Показать, что каковы бы ни были три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и три числа λ, μ, ν , векторы $\lambda\vec{a} - \mu\vec{b}, \nu\vec{b} - \lambda\vec{c}, \mu\vec{c} - \nu\vec{a}$ компланарны.
24. Дан равносторонний треугольник ABC , у которого длины сторон равны. Пологая $\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}, \overrightarrow{AB} = \vec{c}$ вычислить выражения $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

25. Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.
26. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF . Вычислить $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}$.
27. Вычислить площадь параллелограмма, построенного $\vec{a} = \{8; 4; 1\}, \vec{b} = \{2; -2; 1\}$ vektorlardan jasalgan parallelogramm maydanı tabılsın.
28. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB . Выразить вектор $\overrightarrow{CH}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{CB}, \vec{b} = \overrightarrow{CA}$.
29. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ связаны соотношениями $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}, \vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$. Доказать коллинеарность векторов $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.
30. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ образуют угол $\varphi = 120^\circ$ причем $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Определить $|\vec{a} + \vec{b}|, |\vec{a} - \vec{b}|$.
31. Вершины треугольника находятся в точках $A(2; -1; 3), B(4; 0; 1), C(-10; 5; 3)$. Найти направляющие косинусы биссектрисы угла B .
32. Даны точки $A(1; 2; 0), B(3; 0; -3)$ и $C(5; 2; 6)$. Вычислить площадь треугольника ABC .
33. Показать, что если $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.
34. Даны две вершины треугольника: $A(-4; -1; 2), B(3; 5; -16)$. Найти третью вершину C , зная, что середина стороны AC лежит на оси Oy , а середина стороны BC - на плоскости Oxz .
35. Доказать тождество $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$, где λ, μ - какие угодно числа.
36. Показать, что $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$.
37. Найти расстояние от точки $A(2; -5; 3)$ до прямой $2x - y + 3z - 1 = 0, 5x + 4y - z = 0$.
38. Найти расстояние от точки $A(4; 5; 3)$ до плоскости $2x + 4y + z - 3 = 0$.
39. Найти преобразование обратное к аффинному преобразованию $x' = 2x + 3y - 7, y' = 3x + 5y - 9$.
40. Найти расстояние d от точки $M(1; -5; 3)$ до прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

41. Найти расстояние d от точки $M(1; -5; 3)$ до прямой $x = 3t + 1, y = -t - 5, z = 2t + 3$.

42. По формуле подстановки $x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'; y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$, определите угол поворота осей координат.

43. Найти расстояние от точки $P(2; 3; -1)$ до прямой $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$.

44. Найти двухсторонний угол полученное при пересечении двух плоскостей $2x - y + 2z - 3 = 0, 3x + 2y - 6z - 12 = 0$.

45. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $3x - 2y + z - 3 = 0, x - 2z = 0$ перпендикулярно плоскости $x - 2y + z + 5 = 0$.

46. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 2t + 1, y = -3t + 2, z = 2t - 3$ и точку $M_1(2; -2; 1)$.

47. Найти косинус угла между двух прямых: $\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}$.

48. Найдите точку на оси Oz , которая равноудалена от точки $M(1; -2; 0)$ и плоскости $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

49. Напишите уравнение, определяющее геометрическое положение точек с отклонением от плоскости $6x + 3y + 2z - 10 = 0$ на -7 .

50. Даны прямые линии $x = 2t + 1, y = 3t - 2, z = -6t + 1$ и $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$. Доказать, что они перпендикулярны.

51. Найти уравнение плоскости, расположенный в расстоянии $d=3$ от точки $S(3; -2; -3)$ который относится пучок плоскостей $\alpha(10x - 8y - 5z + 56) + \beta(4x + y + 3z - 1) = 0$.

52. Напишите уравнение плоскости, проходящей через пересечение плоскостей $2x + y - z + 12 = 0, x + y + 2z + 12 = 0$ параллельной с отрезком ограниченной точками $M_1(2; 5; -3)$ и $M_2(3; -2; 2)$.

53. При каком значении m плоскости $5x + 4y + 4z + m = 0$ относится пучок плоскостей $\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0$.

54. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1; 4; -1)$, $M_2(-13; 2; -10)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$.
55. Найдите объем пирамиды, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $3x - 4y - 24z + 12 = 0$.
56. Напишите формулу перехода от точки $M(3; 1)$ к точке $M'(1; 2)$, от точки $N(-2; 0)$ от точки $N'(0; 3)$.
57. Найдите аффинное преобразование прямой линии $x + 2y - 1 = 0$, где каждая точка является кратной точкой, которая преобразует точку $M(1; 2)$ в точку $M(2; 2)$.
58. Найдите косинус угла между прямыми $\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}$.
59. Найдите уравнение параболы директриса, которой является прямая $y - 2 = 0$ вершина в точке $(-4; 0)$.
60. Найдите уравнение плоскости пересечения однородных отрезков, проходящей через точки $M_1(-1; 4; -1)$, $M_2(-13; 2; -10)$, оси абсцисса и аппликата отличных от нуля.
61. Даны прямые $x = 2t + 1$, $y = 3t - 2$, $z = -6t + 1$ и $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$. Докажите, что они перпендикулярны.
62. Найдите расстояние d от точки $A(4; 5; 3)$ до плоскости $2x + 4y + z - 3 = 0$.
63. Найдите расстояние от точки $P(2; 3; -1)$ до прямой $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$.
64. Докажите, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ и $x = 3t + 7$, $y = 2t + 2$, $z = -2t + 1$ лежат в одной плоскости, и составьте уравнение этой плоскости.
65. Найдите уравнение плоскости проходящей через прямой $x = 2t + 1$, $y = -3t + 2$, $z = 2t - 3$ и точки $M_1(2; -2; 1)$.
66. Напишите уравнение плоскости, линии пересечения плоскостей $2x + y - z + 12 = 0$, $x + y + 2z + 12 = 0$ и перпендикулярной к плоскости $x - 2y + z + 5 = 0$.
67. Найдите точку пересечения плоскости $6x + 3y + 2z - 10 = 0$ и прямой соответственно $x = 3t$, $y = -3t + 2$, $z = 5t - 3$.

68. Изобразите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 5; -1)$ и ось Ox .

69. Найдите расстояние d от точки $M(1; -5; 3)$ до прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

70. Если заданы формулы подстановки $x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$,
определить угол α , на который должны быть повернуты оси координат.

71. Найти обратную замену к аффинной замене $x' = 2x + 3y - 7$, $y' = 3x + 5y - 9$.

72. Найдите расстояние d от точки $A(2; -5; 3)$ до прямой
 $2x - y + 3z - 1 = 0$, $5x + 4y - z = 0$.

73. Найдите расстояние d от точки $M(2; -5; -4)$ до прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

74. Найдите расстояние d от точки $M(-2; 9; -5)$ до прямой
 $x = 3t - 2$, $y = -t + 4$, $z = 2t + 5$.